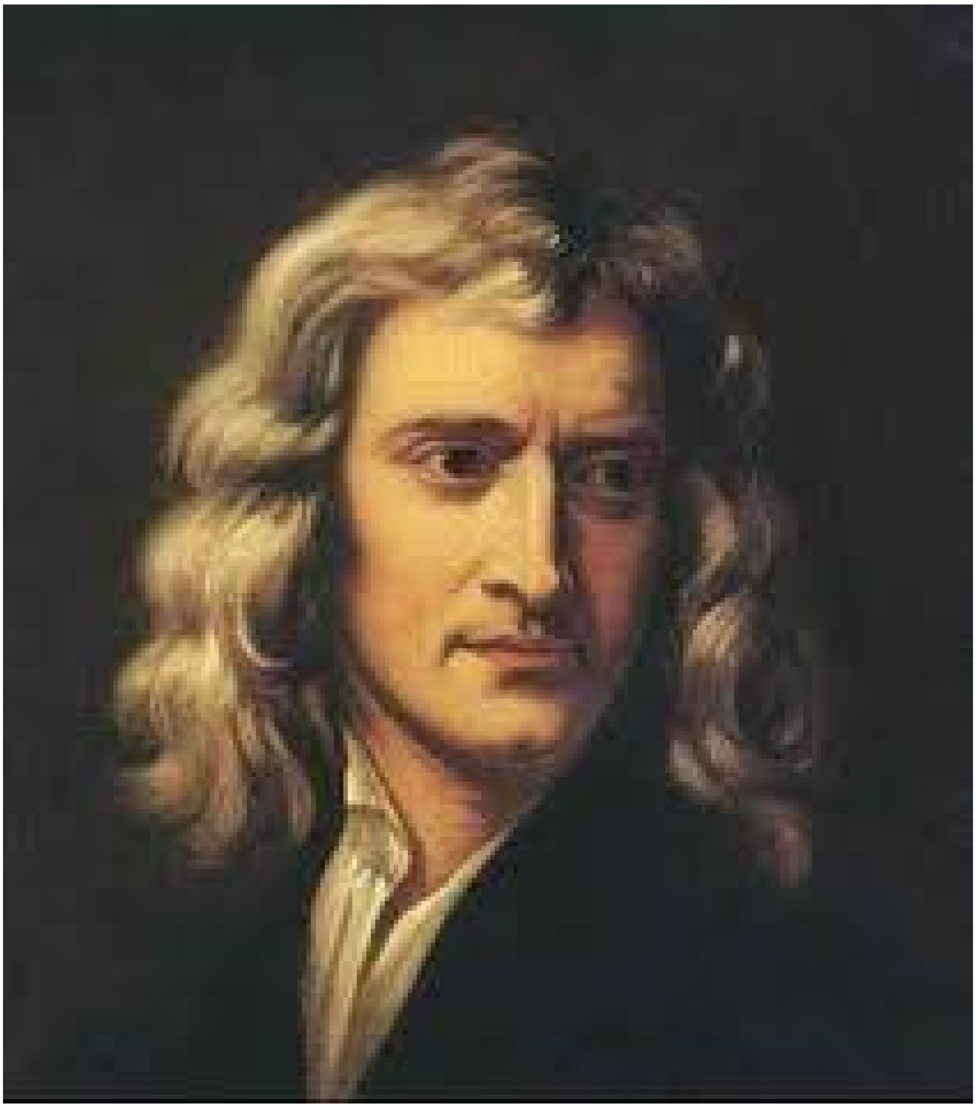
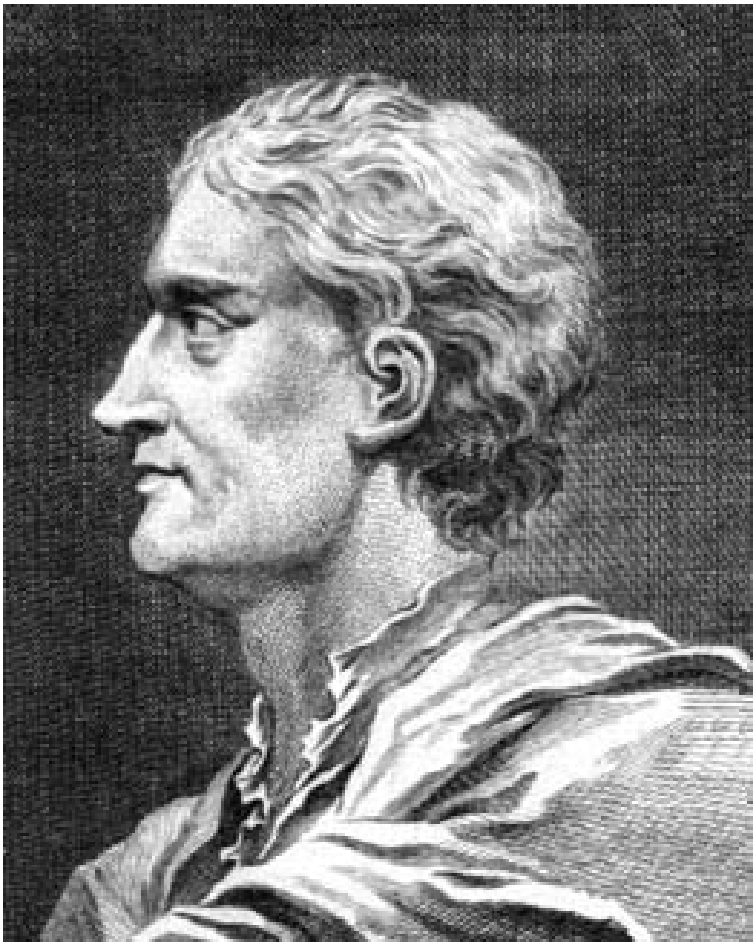
NEWTON A CALCULUS, MINIMALIZACE

F. KOUTNÝ, Zlín

· ***Isaac Newton*** (**1642 –** 31.3.**1727**) (Odkazy [1-6])





Newtonovy spisy

Matematika	***Mechanika***	***Optika***	***Alchymie***	***Teologie***

Dětství

Isaac Newton se narodil na statku ve Woolsthorpe koncem r. 1642. Krátce předtím zemřel jeho děd i otec. Jako novorozenec byl slabý a rodina pochybovala, že zůstane naživu.

Statek moc nevynášel a Isaacova matka se po 2 letech provdala za pastora z blízké vesnice. Malého Newtona ponechala na výchovu babičce. Do 12 let chodil do vesnické školy, potom chodil 4 roky do King’s School v Granthamu. Nijak nevynikal a zdálo se, že asi bude – v tradici svých předků – nebohatým statkářem. R. 1656 matka znovu ovdověla a s 3 dětmi z druhého manželství se vrátila zpět na statek, který se snažila zvelebit. Isaaca vzala v 16 letech ze školy, aby jí na statku pomáhal. Newton však měl o správu a hospodaření statku pramalý zájem.

Mapa jihovýchodní Anglie s hlavními místy Newtonova aktivního života.

Když chodil do školy v Granthamu, bydlel u lékárníka Clarka, jehož bratr byl učitelem matematiky. Tam měl přístup ke knihám, které ho velmi zaujaly. Po 2 letech matka své úsilí přimět Newtona k práci na statku vzdala a v roce 1660 je Newton zase ve škole v Granthamu a připravuje se na universitu. Hlavním předmětem byla latina, možná zvládl něco z řečtiny a hebrejštiny. Dále bylo třeba znát teologii, logiku, gramatiku. Z matematiky se jen povrchně seznámil s Euklidovými Základy. Na jaře

1661 přichází Newton do Cambridge na Trinity College. Je zde jako *sizar*, tj. student, který si svůj pobyt na koleji odpracovává posluhováním při jídle, popř. starším členům koleje.

Vzdělání

V prvních cambridgeských letech se velmi intenzívně a koncentrovaně zabýval matematikou, mechanikou a optikou. Musel překonávat velké obtíže, protože matematická studia začal Descartem a ten při výkladu analytické geometrie vyžadoval hodně algebraických a geometrických znalostí. Vypadá to tak, že v prvních dvou letech v Cambridgi neměl Newton nikoho, kdo by jej při studiu matematiky a fyziky systematicky vedl.

Situace se změnila v r. 1663, kdy vznikla Lucasovská katedra na základě soukromé nadace Henryho Lucase (1610–1663). Prvním vedoucím katedry byl *Isaac Barrow* (1630–1677), který přinesl do cambridgeské výuky novou vědu. Nestudoval jen britské autory. Předtím 4 roky cestoval po Evropě, seznámil se s díly evropských učenců a některé znal osobně. Znal výsledky italské školy Galileiho i francouzské vědy. Barrow vydával řecké antické knihy, neboť v nich byla zachycena logická struktura a filosofie matematiky. Např. Euklidovy Základy byly vrcholem axiomatické výstavby geometrie. Druhou oblastí bylo Archimedovo dílo, které exaktně zvládlo některé problémy z nynější matematické analýzy (výpočty integrálů, tedy objemů a ploch).

Barrow seznámil Newtona i s matematikou na kontinentě, kde zejména ve Francii uzrála půda pro zavedení infinitesimálních metod do matematiky. *B. Pascal* (1623-1662), kterého známe z mechaniky tekutin, jako vynálezce prvního mechanického počítacího stroje, z binomické věty, binomických koeficientů a jako jednoho ze zakladatelů teorie pravděpodobnosti, zavedl tzv. *charakteristický trojúhelník* (Δx, Δy, Δs). *P. Fermat*, (1601-1665), jej užíval také. Pomocí něho se konstruuje tečna ke křivce. Fermat napsal r. 1637 pojednání "*Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*" (Metoda nalezení maxim a minim).

Barrow také ovlivnil Newtona svým upřednostňováním syntetické geometrie, což se projevilo trvalým používáním geometrie a geometrických schémat i tam, kde se dnes používají vzorce. Velký vliv na Newtonovo myšlení měly také Wallisovy práce, zejména *Arithmetica infinitorum* (1655) (*John Wallis* (1616-1673) byl profesorem v Oxfordu).

Newton v roce 1665 (ve věku 23 let) už zvládal metody svých současníků a dovedl je aplikovat. To se týká třeba metody výpočtu derivací algebraických funkcí, kterou používal Fermat a další. Uměl také počítat integrály.

Newton vytvořil z jednotlivých samostatných metod jiných autorů jednotný systém, *calculus* fluxí a fluent. Nebyl však sám – v Německu pracoval na stejném poli neméně významný *Wilhelm Gottfried Leibniz* (1646-1716).

Fluxe a fluenty

Výpočet *fluxe* čili *derivace* ukážeme na funkci $f(x) = cx^n$, $n = 1, 2, \dots$ Pro $o \neq 0$ je

$$\frac{f(x+o)-f(x)}{o} = c\,\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = c\,\frac{[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}o + \binom{n}{2}x^{n-2}o^2 + \dots + o^n] - x^n}{o}$$

$$= c\,\frac{o[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}o \;\; + \dots + o^{n-1}]}{o} = c\,[\,nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}o \;\; + \dots + o^{n-1}].$$

Nyní se položí $o = 0$ a dostane se

$$\dot{f} = (cx^n)^{\cdot} = c\,n\,x^{n-1}.$$

Takto se snadno určí i fluxe polynomu jakožto lineární kombinace mocnin.

S obecnou mocninou už to jde hůře a je třeba znát obecný binomický rozvoj

$$(1+u)^a = 1 + \binom{a}{1}u + \binom{a}{2}u^2 + \binom{a}{3}u^3 + \dots = 1 + au + a(a\text{-}1)\,u^2/2 + a(a\text{-}1)\,(a\text{-}2)\,u^3/6 + \dots$$

Vpravo se vytváří nekonečná řada a měla by se analyzovat její konvergence. To však nyní obejdeme předpokladem, že všechno je OK a $x \neq 0$. Pak jako předtím dostaneme

$$\frac{f(x+o)-f(x)}{o} = cx^a\,\frac{(1+\frac{o}{x})^a - 1}{o} = cx^a\,\frac{[1 + a(o/x) + \binom{a}{2}(o/x)^2 + \dots + (o/x)^a] - 1}{o}$$

$$= cx^a\,\frac{a\left(\frac{o}{x}\right) + \binom{a}{2}\left(\frac{o}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{o}{x}\right)^a}{o} = cx^a a\,\frac{o}{xo}\;[1 + \mathrm{o}(\dots)] \to cax^{a-1}.$$

Problém ovšem je, že k tomu, abychom mohli takto upravovat podíl $\frac{f(x+o)-f(x)}{o}$, musíme předpokládat, že $o \neq 0$. A když dostaneme $\frac{f(x+o)-f(x)}{o} = \dot{f}(x) + o[\dots]$, položíme $o = 0$. Takže napřed o veličině o předpokládáme, že je nenulová, pracujeme s ní, a až dostaneme vhodný výraz, řekneme, že je nulová.

To je přinejmenším špatně zdůvodněné a z hlediska logiky nepřijatelné. Proto se fluxe staly terčem ostré kritiky (nejznámějším kritikem byl *George Berkeley* (1684-1753), významný představitel anglického empirismu).

Potíž je v tom, že v té době nebyla definována limita. Přesnou definici limity podali až kolem roku 1820 *Bernard Bolzano* (1781-1848), a *Augustin L. Cauchy* (1789-1853). V dnešní době definujeme derivaci funkce f v bodě x jako limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tu můžeme označit třeba D$f(x)$. Tím definujeme novou funkci, f', a symbol D vyjadřuje přiřazení $f \to f'$. Můžeme říci, že D je operátor derivování. Rovnost D$f(x) = f'$ vede při zadání f' k obrácené úloze: k zadané funkci g najít takovou funkci G, jejímž derivováním g vznikla. Tedy D$G = g$, neboli $G = \mathrm{D}^{-1}g$.

Funkci G se říká *primitivní funkce* nebo *neurčitý integrál*, v anglické literatuře se označuje také výstižně jako *antiderivative*. Newton ji nazýval *fluenta*. V Newtonově symbolice bychom tedy psali

$$\dot{G} = g.$$

V souvislosti se vztahy mezi fluxemi a fluentami se vynořila řada nových úloh, které vyžadovaly nové metody. Tím vznikl infinitesimální počet, calculus. Newton jej objevil v letech 1665–1666, ale sám jej uveřejnil až po roce 1704.

Podobnými problémy se na kontinentě v letech 1673-1676 zabýval G. W. *Leibniz*, který v Lipsku začal r. 1680 vydávat časopis Acta Eruditorium. V něm také r. 1684 na pouze 6 stránkách publikoval své pojetí infinitesimálního počtu pod názvem ´*Nová metoda maxim a minim*…´.

Leibniz byl významným tvůrcem symboliky, která se v matematickém vyjadřování ujala a používá dodnes. Místo nekonečně malé veličiny o zavedl dx, derivaci funkce f označil jako $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, zavedl znak $\int$ (prodloužené S — summa) pro integrál, pojmy diferenciální a integrální počet (calculus differentialis et integralis) atd.

Je třeba říci, že Newton byl orientován fyzikálně, derivaci (fluxi) vnímal jako rychlost změny a formalismus ho příliš nezajímal. Měl vyloženou nechuť k publikaci svých prací. Publikace totiž otevírá dveře kritice. Newtonovy práce kolovaly mezi jeho přáteli ve formě opisů. Newtonův infinitesimální počet uveřejnil až J. Wallis ve své knize r. 1693.

Trvalé místo v matematice mají např. následující pojmy spojené se jménem Newton (např. [7]):

§ Newtonův interpolační polynom,

§ Newtonova metoda numerického řešení jedné a více rovnic,

§ Newtonův zákon v nauce o vedení tepla $\Delta q = -\alpha(u - u_a)\,\Delta t$.

Další etapy Newtonova života

V r. 1665 se stává bakalářem. V tomto roce kvůli morové epidemii odjel z Cambridge zpět do rodného Woolsthorpu a zůstal tam asi 2 roky. Během těchto 2 let si utřídil mnohé poznatky a vytvořil nové koncepce. Předně vytvořil systematickou nauku fluxí a fluent. Druhou oblastí, v níž se projevil ještě významněji, byla mechanika. Přesněji, šlo o práci na formulaci základních axiomů mechaniky a gravitační zákon. V roce 1668 získává hodnost Master of Arts (magister).

Na universitě v Cambridge zůstal dalších 40 let. Na koleji měl zajištěn pobyt a stravu a mohl vědecky pracovat. V roce 1669 mu Barrow jako schopnějšímu, podle jeho vlastních slov, uvolnil katedru. Newton r. 1669 předal Barrowovi rukopis *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, v němž krátce shrnul teorii fluxí a fluent.

Na universitě Newton přednášel hlavně optiku. Zachovala se zpráva, že Newtonovy přednášky byly nudné, studenti jim nerozuměli a nejednou se prý stalo, že Newton přišel do prázdné posluchárny. Přednášky z optiky detailně popisovaly experimenty a přístroje, podstatnou část tvořily výpočty s dlouhými geometrickými důkazy. Experimenty se tehdy posluchačům nepředváděly a poznatky se předávaly jen mluveným a psaným slovem.

Newtonovy "*Lectiones opticae*" byly výjimečné tím, že obsahovaly jeho vlastní objevy. Jejich rukopis byl někdy r. 1671 uložen do archivu a první část byla otištěna v anglickém překladu až 1728, po Newtonově smrti. Newtonovy poznatky týkající se lomu, chromatických vad čoček, konstrukce dalekohledu-reflektoru se šířily opisy.

Koncem 1671 zaslal Newton do *Royal society* svůj dalekohled. Ten byl vysoce oceněn a Newton byl přijat do Royal Society. V únoru 1672 odevzdal sekretáři této společnosti Oldenburgovi zprávu "Nová teorie světla a barev", která byla vzápětí otištěna ve Philosophical Transactions. Znamená začátek nového stylu vědeckých publikací, charakterizovaného stručným a věcným popisem pouze vlastních výsledků autora.

Na druhé straně jeho práce vyvolala vlnu kritiky a řadu připomínek, které Newtona znechutily. A možná byly příčinou, proč své další výsledky nechtěl publikovat. Pak se však dostával do častých sporů o prioritu objevů. Známé jsou spory s velmi mnohostranným Hookem, dále s Wrenem, Flamsteedem a dalšími kolegy z Royal Society. Později (30. 11. 1703, po smrti Hookově (3.3.1703)) se stal předsedou Royal Society. Tuto funkci zastával do konce života a jejím prostřednictvím uplatňoval svůj vliv. Zapojil se také do politiky. V r. 1701 byl zvolen do parlamentu, královna Anna Stuartovna ho 1706 pasovala při návštěvě Cambridge na rytíře. Newton byl asi vůbec prvním vědcem, kterému se dostalo takového oficiálního uznání.

V této době se také rozhořel spor o prioritu objevu diferenciálního a integrálního počtu mezi Newtonem a Leibnizem. Rozdíl v charakterech obou objevitelů infinitesimálního počtu ukazují tyto příklady:

Newtona ve snaze znehodnotit protivníkovu práci nezastavila ani Leibnizova smrt (14.11.1716). Naopak využívá toho, že Leibniz se už nemůže bránit, a dál publikuje argumenty proti němu.

Leibniz měl námitky proti filosofii Newtonova přítele Johna Locka, 1632–1704 a měl v úmyslu vydat je knižně. Když ale Locke zemřel, Leibniz je nepublikoval.

Angličané stranili Newtonovi a národy na kontinentě většinou Leibnizovi. Výhody Leibnizovy koncepce a symboliky se však brzy projevily. Na Leibnizovy práce navázali Bernoulliové, Euler a další evropští budovatelé infinitesimálního počtu a vytvořili matematickou analýzu, jak ji známe dnes. Naproti tomu Newtonovo pojetí a symbolika k dalšímu rozvoji neinspirovaly a jejich vývoj ustrnul. V Anglii vznikly nové práce v analýze až po převzetí kontinentální symboliky a metod.

Mechanika

Newtonovým nejznámějším a nejvýznamnějším dílem jsou *Filosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické principy filosofie přírody, dnes bychom řekli mechaniky). První jeho myšlenky se začaly rýsovat v r. 1666 a váže se k nim známá anekdota o jablku spadlém Newtonovi na hlavu. Celé dílo (3 svazky) vyšlo 1687.

V předmluvě jsou 3 axiomy, s nimiž se studenti tradičně seznamují na gymnáziu.

Axiomata sive leges motus:

A1: *Corpus omne perseverare in statu suo quiscendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare*.

A2: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur*.

A3: *Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem sive corporum diorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi*.

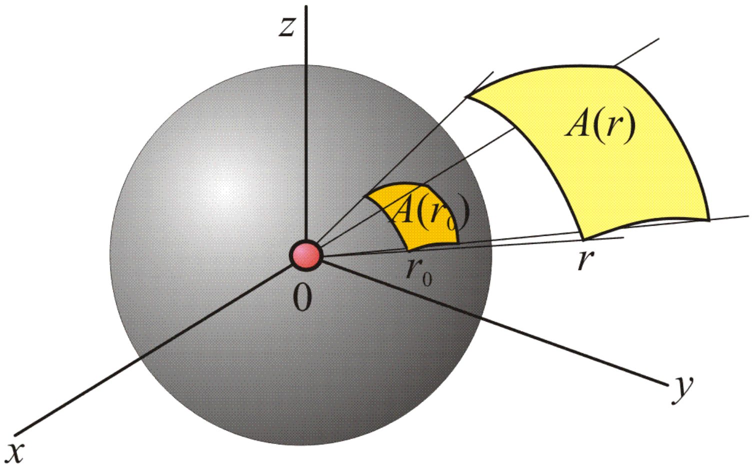
Newton podle vlastních slov “stál na ramenou obrů“. Jedním byl Galileo Galilei (1564-1642), který studoval tíži a prakticky znal oba první Newtonovy axiomy. Druhým byl Christian Huyghens (1629-1695), “největší hodinář“, který studoval kyvadlo a odstředivou sílu. Třetím byl Johannes Kepler (1571-1630), známý především objevem tří zákonů pohybu planet.

Z Keplerových zákonů plyne gravitační zákon (jak se uvádí v učebnicích mechaniky, např. [6], str. 156-157)

$$F = -\,G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \text{ nebo vektorově } \mathbf{F}_{12} = -\,G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\,,$$

kde $\mathbf{F}_{12}$ je síla, kterou přitahuje hmota m_1 hmotu m_2, $\mathbf{r}_{12}$ radiusvektor od těžiště hmoty m_1 k těžišti hmoty m_2, $\mathbf{r}_{12}/r_{12}$ je jednotkový vektor ve směru $\mathbf{r}_{12}$ a G je gravitační konstanta, $G = 6.673\times10^{-11}$ m^3/(kg s^2). A obráceně, z gravitačního zákona plynou Keplerovy zákony. Za zakladatele nebeské mechaniky by se tedy měl považovat Kepler. Kepler však zůstal u kinematiky a otázku o velikosti přitažlivé síly si nepoložil.

V souvislosti se závislostí přitažlivé síly na vzdálenosti se vybavuje analogie mezi intenzitou fyzikálního pole a intenzitou světla, které se z bodového zdroje šíří prostorem. Kdybychom si intenzitu pole představili jako množství přímočarých paprsků z bodového zdroje procházejících jednotkovou plochou, pak by jejich intenzita (plošná hustota) ve vzdálenosti r od zdroje byla samozřejmě nepřímo úměrná r^2 (obrázek). Úměrnost hmotnosti se dá chápat jako součet sil, které působí na hmotné částice obsažené v tělese. Pevné těleso je složeno z pevného počtu částic a na ně působí silová intenzita klesající se čtvercem vzdálenosti.



$$\mathit{Intenzita} = I(r) = \frac{\mathit{const}}{A(r)}$$

$$\frac{I(r)}{I(r_0)} = \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$|F| = m \times \mathrm{Const} \times \frac{1}{r^2}\,.$$

Intenzita pole jako analogie intenzity světla vyzařovaného z bodového zdroje.

Druhý pohybový zákon se matematicky formuluje takto: síla je rovna časové změně hybnosti, mv,

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv).$$

Zde F je síla, m hmotnost a v rychlost čili derivace dráhy r podle času t, $v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$.

Můžeme rozlišovat dva případy.

1. m konstantní, např. hozený kámen, projektil, meteorit, planeta. Pro malé změny radiusvektoru $\mathbf{r}$ (na povrchu Země) je $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(\mathrm{t}) = -\,\mathbf{g} = \mathrm{const}$. Např. šikmý vrh ve vakuu je pak popsán rovnicí $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(\mathrm{t}) = -\,\mathbf{g}$ s počátečními podmínkami $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Řešením je oblouk paraboly, jak se učí na středních školách.

2. m je proměnné, např. u raket, kdy tryskou prolétá plyn konstantní rychlostí v_p. Podle třetího pohybového zákona (akce a reakce) je změna hybnosti rakety

$$(m - \Delta m)\,\Delta v \approx m\,\Delta v$$

rovna hmotnosti plynu prošlého tryskou za jednotku času, tedy $-\Delta m\ v_p$ (úbytek hmotnosti rakety je $\Delta m = v_p \rho A\ \Delta t$, kde ρ je hustota plynu a A je plocha průřezu trysky), tj. $m\ \Delta v = -\Delta m\ v_p$ nebo $\Delta v/\ v_p = -\Delta m/m$. V diferenciálním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}v}{v_p} = -\frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

Integrací dostaneme

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_p} = -\int_{m_0}^{m_0-m_p} \frac{\mathrm{d}m}{m},$$

tj.

$$v = -v_p \ln \frac{m_0 - m_p}{m_0} = v_p \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p}.$$

(*Ciolkovského rovnice*).

Newtonova mechanika založená na axiomech A1, A2, A3 se rozvíjela dalších 200 let. Teprve *A. Einstein* r. 1915 ukázal, že jen aproximuje důsledky jeho obecné teorie relativity.

•

Pro dokreslení Isaaca Newtona jako historické postavy následují dva výtahy z citátů v knize [1].

JOACHIM FLECKENSTEIN: *Naturwissenschaft und Politik…*, München 1965, s. 86

Newtonovy alchymistické rukopisy by naplnily asi 30-40% sebraných spisů. To je snad důvod, proč se Royal Society dodnes nerozhodla vydat “Collected Works of Sir Isaac Newton“. Až donedávna se věřilo, že Royal Society má zábrany vydat sebrané spisy z nacionálních prestižních důvodů. Newtonův charakter by z toho těžko vyšel bez poskvrny. Poznalo by se, že Newton hrál v prioritním sporu s Leibnizem potměšilou, zlomyslnou a smrtelně trapnou roli. Ale edice musí ukázat všechno. Tak by se musely publikovat i příkazy, které Newton dával svým spoluzakladatelům Royal Society, aby v pozadí jednali proti Leibnizovi.

•

ANDRÉ MAUROIS: *Život Voltairův*, Praha 1933

V roce 1727 viděl Voltaire Newtonův pohřeb a byl překvapen velkolepými poctami, jichž se dostalo geniu vědy. Tělo předtím vystavené za svitu pochodní bylo neseno do Westminsterského opatství sledováno ohromným průvodem, v němž byli kancléř a ministři…

Později Voltaire trochu vystřízlivěl ze svého nadšení, když prohlásil: “Za svého mládí jsem si myslel, že Newton dosáhl úspěchu výhradně svými zásluhami. Představoval jsem si, že dvůr a město Londýn ho s jásotem jmenovaly velmistrem královské mincovny. Ale vůbec to tak nebylo. Isaac Newton měl roztomilou neteř paní Conduitovou, která se líbila Halifaxovi, ministru financí. Bez hezké neteře by neměl zhola nic ani ze své gravitace ani ze svých výpočtů s nekonečně malými veličinami.“

•

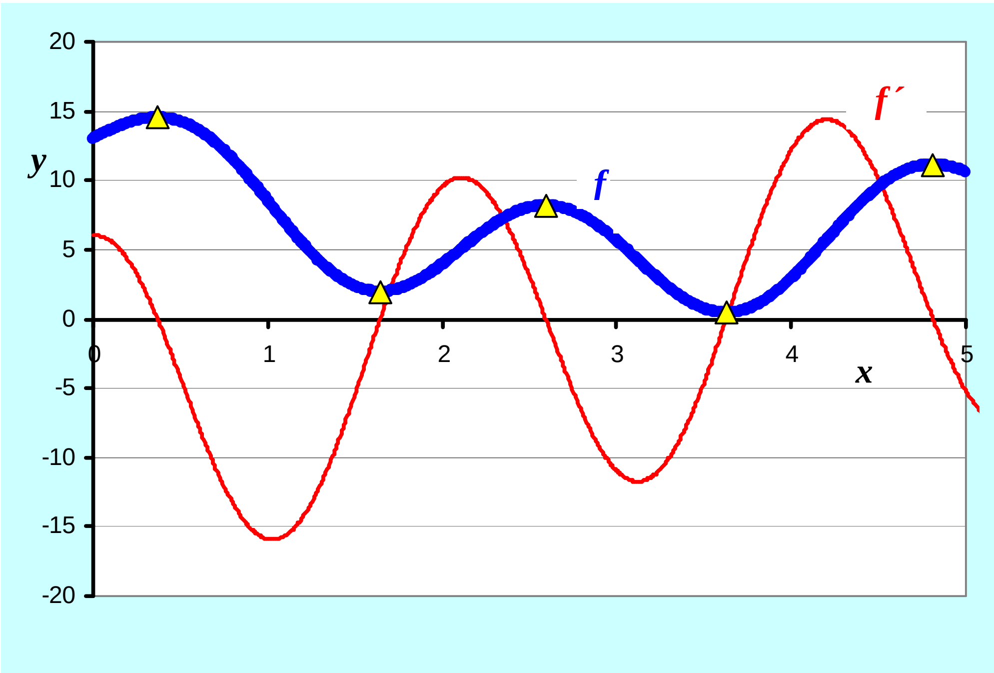
· *Problém minima (maxima) reálné funkce*

U diferencovatelných funkcí jedné proměnné hledání minima vyřešil už P. Fermat. Snadno se dokáže, že je-li $f'(x) > 0$, je funkce f v bodě x rostoucí a je-li $f'(x) < 0$, je funkce f v bodě x klesající [7]. Má-li mít funkce v bodě x extrém (maximum nebo minimum), musí být nutně $f'(x) = 0$. Bod, v němž $f'(x)=0$ je stacionárním bodem funkce f. Hledání stacionárních bodů hladké funkce je tak převedeno na řešení rovnice $f'(x)=0$.

Hledání maxima funkce f je zřejmě ekvivalentní hledání minima funkce $(-f)$.

Můžeme se setkat také s funkcemi, u nichž je výpočet funkčních hodnot velmi složitý, např. se počítají numericky jako integrály nebo řešení komplikovaných rovnic, a jejich derivace se nedají dost dobře zadat analyticky. Pak je nutno použít numerických metod a derivaci nahradit podílem diferencí s malým přírůstkem h argumentu x, např. u oboustranné derivace podílem symetrických diferencí

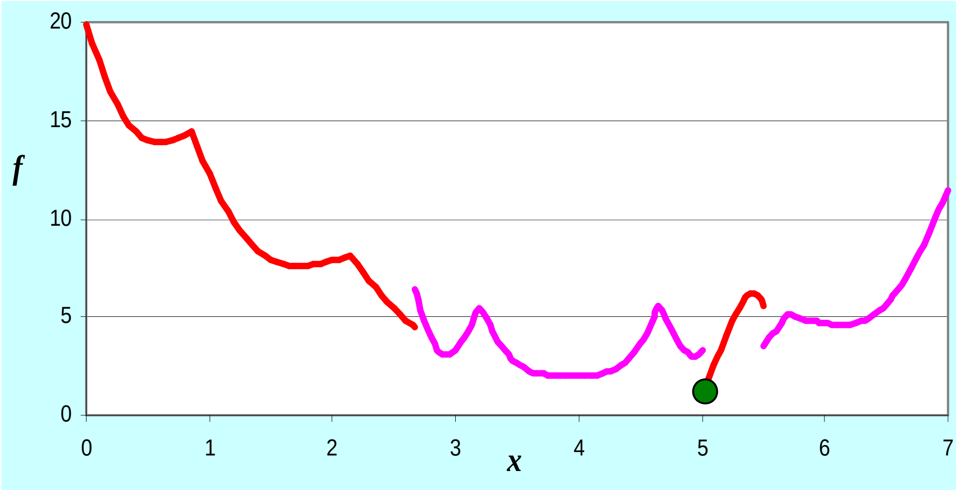
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} .$$



Grafy funkce $f(x) = (x-3)^2 + 4(1 + \sin 3x)$ *a její derivace.*

Pokud funkce nebude mít v uvažovaném intervalu všude derivaci, nelze tohoto postupu globálně použít (lze jím hledat nejvýš lokální extrémy).

Taková je funkce na dalším obrázku. V několika bodech znázorněného intervalu má body zlomu, v nichž je derivace zleva jiná než derivace zprava a derivace tedy neexistuje. V několika dalších bodech je nespojitá a v nich by limita dělené diference byla ±∞.



$$\text{Graf funkce } f(x) = \begin{cases} 5 + (x-a)^2 - 3\left|\cos\frac{(x-a)^2}{2}\right| & \text{pro} \quad x \in [0, 2\frac{2}{3}), \\ 5 + (x-a)^2 - 3\left|\cos\left(3(x-a)^2\right)\right| & \text{pro} \quad x \in [2\frac{2}{3}, 5), \\ 1 + (x-a)^2 - 3\cos\,(x-a)^3 & \text{pro} \quad x \in [5, 5\frac{1}{2}), \\ 5 + (x-a)^2 - 3\left|\cos\frac{(x-a)^2}{2}\right| & \text{pro} \quad x \in [5\frac{1}{2}, 7] \end{cases} \quad a \text{ pro } \quad a = \ln(50.5).$$

I v tomto případě je však z grafu *f* zřejmé, že minimum *f* je v bodě $x = 5$. I když popis funkce *f* vypadá složitě, dá se v tomto případě výpočet funkčních hodnot snadno realizovat na počítači (třeba v EXCELu nebo nějakém programovacím jazyku).

Je pak pochopitelné, že při hledání minima neznámé složité funkce se preferují metody, které pracují jen s hodnotami funkce. Těm se také říká *přímé metody*.

Minimum lze však hledat jen u reálných funkcí zpravidla v metrických prostorech na množinách, které vzniknou "slepením" kompaktních množin kladné míry, na nichž je daná funkce spojitá.

Jako opačný příklad definujme funkci

$$f(x) = x^2 + |\text{sign}(x-1/\pi)|.$$

Člen $|\text{sign}(x-1/\pi)|$ se anuluje jen v izolovaném bodě $x = 1/\pi$, takže

$$\min\{f(x): x \in [0, 1]\} = f(1/\pi) = 1/\pi^2.$$

Číslo $1/\pi$ je iracionální. Počítač však pracuje jen s racionálními čísly a vždy by vyšlo

$$\min\{f(x): x \in [0, 1]\} = \min\{x^2 + 1: x \in [0, 1]\} = 1.$$

Možná trochu zajímavější je funkce $g(x, y) = |\text{sign}(x^2+y^2-2)| + x^2 + y^2 - x - y$, která představuje rotační paraboloid $z(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ rozříznutý podél kružnice $x^2 + y^2 = 2$. Uvnitř kružnice leží lokální minimum $z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, ale absolutní minimum je na kružnici $z(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - \sqrt{2}$.

Při numerickém hledání minima je vždy zadána požadovaná přesnost $\varepsilon > 0$ (tolerance) výpočtu buď u funkce nebo u nezávisle proměnných. Ve druhém případě pak stačí dostat se do ε–okolí skutečného minima. V předchozím případě by kružnice (množina s nulovou plošnou mírou) přešla do mezikruží s kladnou plošnou mírou.

U funkcí spojitých po částech lze hledání minima realizovat na počítači buďto prohledáváním konečné tzv. ε–sítě pokrývající danou oblast Q nebo použít náhodné generování bodů. V uzlech nebo středech množin ε–sítě nebo v náhodných bodech se počítají funkční hodnoty a jejich postupným porovnáváním se najde minimum.

K racionálnímu prohledávání Q je však výhodné použít vývojových mechanismů uplatňujících se v živé přírodě (genetice).

Genetický algoritmus.

Nejprve se vygeneruje základní *populace* P složená z nevelkého počtu p náhodných bodů (jedinců) $\mathbf{t}^k$, P = $\{\mathbf{t}^k : k = 1, ..., p\}$, např. $p = 200$. Populace P se v dalších krocích vyvíjí dvěma mechanismy převzatými z genetiky.

Křížení. Náhodně se vyberou dva prvky (rodiče) $\mathbf{t}^u$, $\mathbf{t}^v \in$ P a generuje se posloupnost náhodných čísel $\{r_i : 1 \le r_i \le m, i = 1, ..., n\}$. Prvky $\mathbf{t}^u$, $\mathbf{t}^v$ se oba rozdělí stejně podle $\{r_i\}$ a vzniklé části se křížově zkombinují tak, že k první části $\mathbf{t}^u$ se přidá druhá část prvku $\mathbf{t}^v$ a k první části $\mathbf{t}^v$ se přidá druhá část $\mathbf{t}^u$. Tak vzniknou dva nové prvky (potomci):

$$\mathbf{t}^{uv} = \mathbf{t}^{u,1} \oplus \mathbf{t}^{v,2}, \quad \mathbf{t}^{vu} = \mathbf{t}^{v,1} \oplus \mathbf{t}^{u,2}.$$

Názorně to předvádí následující schéma pro hodnoty $n = 3$, $m = 12$ a posloupnost $\{r_i\} = \{8, 2, 5\}$.

1. rodič $\mathbf{t}^u$

0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1

2. rodič $\mathbf{t}^v$

1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1. potomek $\mathbf{t}^{uv}$

0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

2. potomek $\mathbf{t}^{vu}$

1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1

Mutace. U náhodně vybraného jedince $\mathbf{t}_k \in$ P, $1 \le k \le p$, se jeho náhodně vybrané prvky změní na opačné. Pro demonstraci vezměme prvního potomka z příkladu křížení a změnu provedeme se stejnou posloupností $\{r_i\}$. Odpovídající mutace vypadá takto:

jedinec $\mathbf{t}^k$

0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

mutant $\mathbf{t}^{km}$

0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1

Počet mutací volíme mnohem menší než počet křížení (třeba 10krát nebo 20krát).

Mutace slouží ke zvětšení variability populace P a předchází příliš brzké lokalizaci (homogenizaci) populace.

Vývoj populace. Pro výběr jedinců do populace, jejíž rozsah *p* zůstává pevný, se používá vhodně zvolené účelové funkce. Při hledání minima funkce $f(\mathbf{x})$ to může být přímo funkční hodnota. V dosavadní populaci se vybere kandidát $\mathbf{t}^w$ na vyloučení, pro nějž

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{t}^w)) = \max \{ f(\mathbf{x}(\mathbf{t}^k)) : k = 1, ..., p\}.$$

Nový prvek $\mathbf{t}^e$ vzniklý křížením nebo mutací se porovná s $\mathbf{t}^w$. Je-li

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{t}^e)) < f(\mathbf{x}(\mathbf{t}^w)),$$

zařadí se $\mathbf{t}^e$ do populace P místo $\mathbf{t}^w$. Tímto výběrovým procesem se kvalita populace postupně zvyšuje.

Je zřejmé, že bod $\mathbf{x}(\mathbf{t}^e)$ nikdy neopustí původně zvolený interval Q. To je velmi cenné a zajišťuje genetickému algoritmu značnou dávku robustnosti (stability).

Popsaný evoluční proces je nekonečný a musí se nějak zařídit jeho přerušení, např. po zadaném počtu vývojových kroků, po splnění vhodné podmínky nebo prostě ručně z klávesnice počítače.

Příklad. Řešme soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x^2 - y^2 + z^2 = x + y + z = 0.$$

v krychli [–1, 1] × [–1, 1] × [–1, 1]. Už jsme si řekli, že řešení $(x, y, z)^T$ lze hledat jako minimum funkce

$$F(x, y, z) = |x^2 + y^2 + z^2 - 1| + |x^2 - y^2 + z^2| + |x + y + z|.$$

Výsledky pěti pokusů o nalezení kořenového vektoru $(x, y, z)^T$ popsaným genetickým algoritmem jsou uvedeny v tabulce 8.19.

pokus	1	2	3	4	5
x	**0.70691**	**0.00049**	**0.00018**	**-0.00006**	**-0.00049**
y	**-0.70721**	**-0.70703**	**0.70697**	**-0.70715**	**-0.70703**
z	**0.00055**	**0.70715**	**-0.70734**	**0.70691**	**0.70740**
F(*x*, *y*, *z*)	0.00080	0.00082	0.00083	0.00066	0.00094
pracnost, H	2 834	947	1 526	1 567	1 454

Pět pokusů o řešení soustavy rovnic $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x^2 - y^2 + z^2 = x + y + z = 0$ *genetickým algoritmem (H = Horner = výpočet funkční hodnoty).*

Obrovskou výhodou genetického algoritmu je jeho robustnost, univerzálnost a schopnost najít řešení nebo aspoň kvalitní odhady řešení velmi složitých úloh, u nichž jiné metody selhávají. Genetický algoritmus např. umožňuje snadné nalezení parametrů regresních funkcí nebo parametrů rozdělení náhodných veličin a opakováním výpočtů určit i intervaly spolehlivosti parametrů. A je úplně jedno, zda parametry v ní vystupují lineárně nebo nelineárně. Jen je třeba úlohu převést na vhodnou minimalizační úlohu.

Aplikace u distribucí náhodných veličin

V obecném popisu dějů rozlišujeme dvě situace:

(i) Při stejných podmínkách je výsledek děje nebo procesu vždy stejný, takže výsledek je podmínkami určen jednoznačně. Takový děj nazýváme *deterministický*.

Příklady.

- Změna dráhy přímočarého pohybu vyvolaná konstantním zrychlením a je $s(t) = at^2/2$.
- Vklad $Q(0)$ v bance při *konstantní* úrokové míře p procent za rok poroste v ročních intervalech podle vztahu $Q(n) = Q(0)\ (1 + p/100)^n$, tj. jako geometrická posloupnost s kvocientem $(1 + p/100)$.

(ii) Při stejných podmínkách není výsledek vždy stejný. Závisí tedy na dalších, neznámých faktorech. Pokud se při změně podmínek objeví systematičnost, trend, může to pomoci neznámé faktory objevit. Jestliže tomu tak není, zůstávají výsledky neovlivnitelné, jsou *náhodné čili stochastické*. Stochastický děj můžeme definovat formálně jako negaci děje deterministického.

Příklady.

- Hod hrací kostkou realizuje zobrazení hodu (třeba pořadí hodu) do množiny počtu puntíků na stěně kostky {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- Vklad $Q(0)$ v bance při náhodně proměnné úrokové sazbě $p(n)$ v n-tém roce bude náhodný a bude se měnit podle vztahu

$$Q(n) = Q(0)\ (1 + p(1)/100)\ (1 + p(2)/100) \ldots (1 + p(n)/100).$$

Je zřejmé, že definice deterministického děje úzce souvisí s definicí funkce či obecněji zobrazení, jak je známe z matematiky.

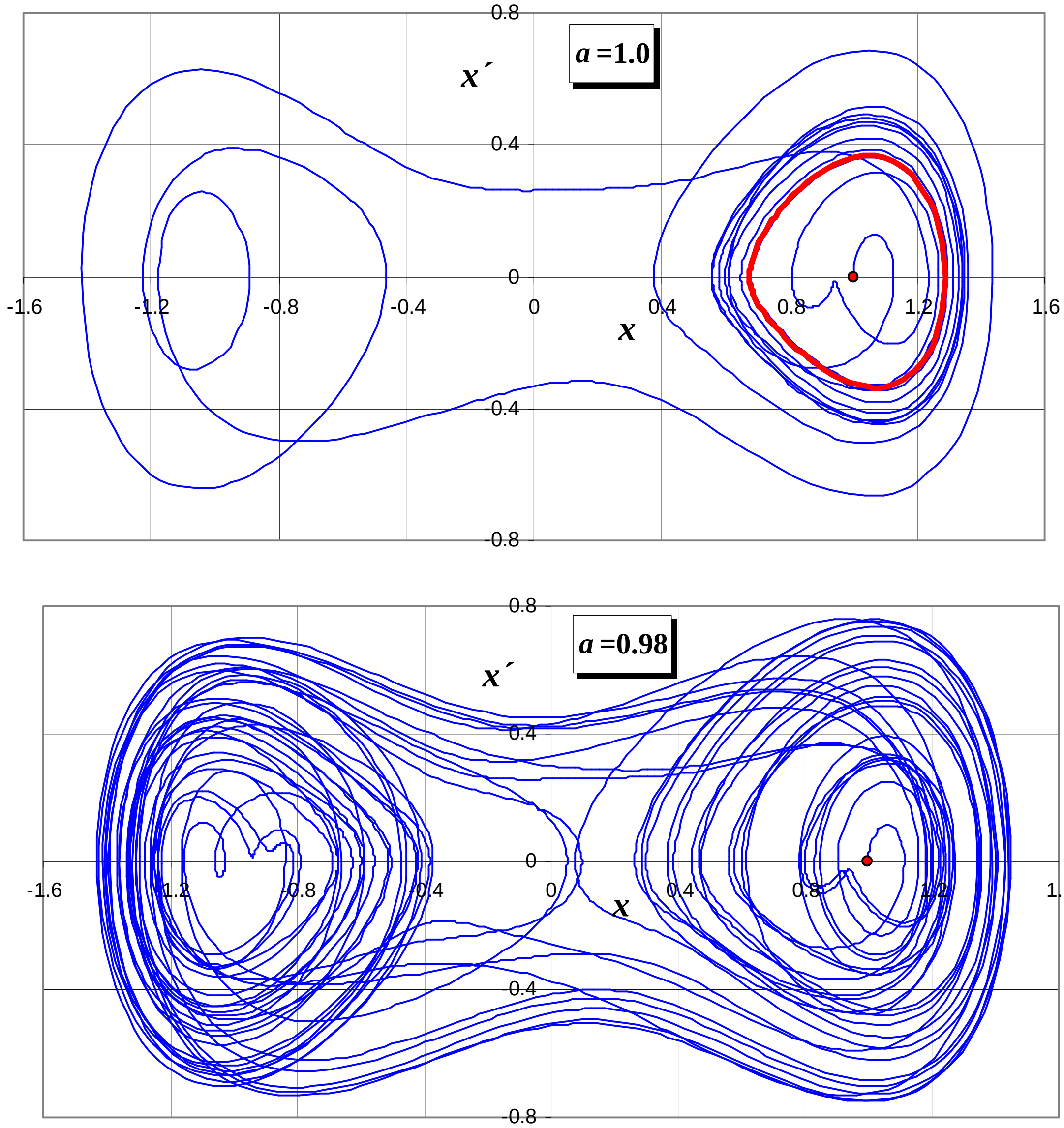
Náhodné děje tvoří předmět studia *teorie pravděpodobnosti*. Podněty ke vzniku teorie pravděpodobnosti dalo analytické uvažování o možnostech výhry v hazardních hrách. Historicky první knihu o pravděpodobnosti napsal *G. Cardano* (1501-1576). Stejnou motivaci měli také francouzští zakladatelé teorie pravděpodobnosti v dnešním slova smyslu, *Pierre de Fermat* (1601-1665) a *Blaise Pascal* (1623-1662). Po formulování infinitesimálního počtu se jeho metody přenesly na zkoumání spojitých náhodných veličin. Teorie pravděpodobnosti se rozšířila pracemi slavných matematiků, jako byli v 19. století např. *Laplace*, *Poisson*, *Cauchy*, *Gauss*, *Čebyšev* aj. a ve 20. století *Borel*, *Wiener*, *Lévy*, *Ljapunov*, *Markov*, *Chinčin*, *Kolmogorov* aj.. I teorie her je dnes samostatná matematická disciplina, kterou na moderních základech vybudovali *von Neumann* a *Morgenstern* a která se dá použít k řešení problému antagonistické optimalizace jako “spravedlivé hry“ [8].

Dělení dějů na deterministické a stochastické není ani zdaleka bez problémů. To, co se při měření s malou přesností jeví jako deterministické, může být při vysoké přesnosti stochastické.

Také ryze deterministické objekty se za jistých podmínek mohou začít chovat náhodně, nepředvídatelně. Pro takové objekty se ujal název *podivné atraktory* (strange attractors).

Jako konkrétní příklad můžeme uvést počáteční úlohu pro Duffingovu diferenciální rovnici (popisující nelineární oscilátor), u níž se jen nepatrně změní jediný parametr ***a***:

$$x''(t) + 0.2\,x'(t) + x(t)\,[x^2(t) - a] = 0.25 \cos t\,, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \qquad (1)$$



Fázové trajektorie Duffingova podivného atraktoru pro a=1, a = 0.98.

(čárka nad x značí derivaci podle t). Rovnice (1) má ve fázové rovině ($0xx'$) pro a = 1.00 limitní cyklus a fázová trajektorie k němu doběhne dost rychle. Při změně ***a*** jen o 2%, na a = 0.98, tendence k zacyklení zmizí. Fázová trajektorie se chová nepředvídatelně, chaoticky, a postupně vyplní určitou plochu.

Podivné atraktory nejsou jen nějakou akademickou záležitostí. První podivný atraktor byl publikován r. 1963 jako model proudění atmosféry (*Edward Lorenz*) a vysvětluje náhodný, tj. do určité míry nepředvídatelný, charakter počasí. Ukazuje se také, že sluneční soustava není ten podivuhodně přesný a neměnný hodinový stroj, za který byla do konce 19. století považována, ale je v podstatě rovněž podivným atraktorem. V dlouhém časovém rozpětí asi přestane platit Gaussův vzorec pro výpočet velikonoc (patrně odvozený na základě kongruencí mezi oběžnými dobami Měsíce kolem Země a systému Země/Měsíc kolem Slunce v časovém referenčním rámci gregoriánského kalendáře).

Události v reálném světě jsou směsicí deterministických a stochastických dějů. U některých převládá deterministický charakter a u jiných naopak stochastický. Stochastičnost se však jeví jako mnohem univerzálnější a provází nás na každém kroku. Je zřejmá na vývoji lidské nebo populace jakéhokoli biologického druhu, rozpadu radioaktivních prvků, vývoji ekonomiky a finančnictví, směnných kurzech, tržbách, investicích, na průbězích a výsledcích technologických operací, chemických reakcí, na přesných dobách odletů leteckých spojů, hustotě dopravy na vymezeném úseku silnice, kvalitě výrobků, pevnosti materiálů, délce života výrobků nebo živočichů atd.

Zatím jsme mluvili jen o generování náhodných čísel nebo generování náhodné veličiny z nějakého intervalu. O teorii pravděpodobnosti a statistice existuje spousta literatury a více základních informací lze získat také na stránkách [7], ze skripta [8] atd.

Tahová pevnost materiálů jako náhodná veličina

U všech reálných materiálů se dá pozorovat jen konečná pevnost jako důsledek molekulární nebo atomové struktury a konečnosti příslušných přitažlivých (vazebních) sil. Všechny technické materiály jsou z mikroskopického hlediska jen směsi různých molekul či atomů. To znemožňuje, aby jejich stavební částice zaujaly ten ideální stav, který by minimalizoval energii jejich systému, jak tomu je v čistých materiálech, které v důsledku homogenity a vnitřních vazeb mají v tuhém stavu mnohem vyšší pevnost než běžné technické materiály. Tato ideální pevnost se dá považovat za přirozenou horní mez pevnosti. Na druhé straně, pevnost nemůže být záporná. Hodnoty pevnosti padají tedy vždy do konečného intervalu omezeného z dolní strany nulou a z horní strany neznámou ideální pevností. Z čistě fyzikálního a filosofického hlediska nelze tedy jako rozdělení pevnosti používat rozdělení pravděpodobnosti s jednostranně nebo oboustranně neomezenými definičními obory, k nimž patří např. normální rozdělení, gama rozdělení, χ^2, Weibullovo rozdělení atd.

Buď X náhodná pevnost nebo jiná proměnná z intervalu $[x_{min}, x_{max}]$ (hodnoty náhodné proměnné se značí malými písmeny). Dolní a horní mez se mohou vzít jako neznámé parametry a pomocí nich se dá zavést nová proměnná $t = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$, $0 \le t \le 1$. Nyní lze jako hustotu pravděpodobnosti vzít hladkou funkci, která se (popř. i se svou derivací) anuluje v krajních bodech 0 a 1, má maximum mezi 0 a 1 a její průběh je podobný histogramům empirických četností.

Nejpřirozenější volbou je součin mocnin t a $(1 - t)$, tj.

$$f_B(t;\, a_1,\, a_2,\, x_{max}) = C_B\ t^{a_1}(1-t)^{a_2}$$

(neúplné beta rozdělení [7-10], krátce B-rozdělení).

Zde a_1, a_2 jsou parametry, a_1, $a_2 > 0$, a konstanta C_B se vypočte numericky pomocí funkcí B (beta) nebo Γ (gama) (Eulerovy integrály 1. a 2. druhu [7-11])

$$C_B = \frac{1}{\int_0^1 t^{a_1}(1-t)^{a_2}\,dt} = \frac{1}{\mathrm{B}(a_1+1,\, a_2+1)} = \frac{\Gamma(a_1+a_2+2)}{\Gamma(a_1+1)\Gamma(a_2+1)}\ .$$

Dalšími parametry jsou $a_3 = x_{min}$, $a_4 = x_{max}$. Transformací $[x_{min},\, x_{max}] \xrightarrow[x \to t]{} [0,\, 1]$ se předchází selhání výpočtů v důsledku překročení strojového rozsahu čísel při výpočtech mocnin s velkými exponenty.

Statistická přiměřenost zvolené teoretické distribuce k dané sadě empirických četností se dá ověřovat různými testy dobré shody. Velmi názorný a často používaný je χ^2 test [7-10]. Dá se stručně popsat takto.

Interval $[x_{min},\, x_{max}]$ se rozdělí na K zdola uzavřených intervalů $x_{k-1} \le x < x_k$, $x_{min} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{K-1} < x_K = x_{max}$. Empirickou četnost výskytu X v k-tém intervalu (třídě) označme n_k. Buď $n = \Sigma n_k$ rozsah výběru a p_k pravděpodobnost přiřazená k-té třídě zvolenou distribuční funkcí F s obecně A neznámými parametry $a_1, \ldots, a_A$,

$$F(x;\, a_1, \ldots, a_A) = \int_0^x f(s;\, a_1, \ldots, a_A)\,\mathrm{d}s$$

tj.

$$p_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s;\, a_1, \ldots, a_A)\,\mathrm{d}s.$$

Test χ^2 spočívá ve srovnání veličiny X^2 sestavené z vypočtených četností np_k a empirických četností n_k,

$$\mathrm{X}^2(a_1, \ldots, a_A) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k},$$

s kritickou hodnotou $\chi^2_\alpha(K-1-A)$. Zde α značí hladinu významnosti testu, obvykle $\alpha = 0.05$ a $K - 1 - A$ jsou stupně volnosti. Je-li $\mathrm{X}^2/\chi^2 \ge 1$, zvolené rozdělení F se zamítá.

K zamítnutí hypotézy je třeba najít minimum funkce $\mathrm{X}^2(a_1, \ldots, a_A)$. K tomu lze jako velmi spolehlivou metodu použít genetický algoritmus.

V definičním oboru X^2 (prostoru parametrů) se zvolí vhodný kvádr P jako konvexní kombinace minimálního a maximálního odhadu parametrů,

$$P = \{(a_1, ..., a_A):\ a_i = a_i^{\min} + (a_i^{\max} - a_i^{\min})\, t_i,\ 0 \le t_i < 1,\ i=1,..., A\}.$$

Zlomkovou část každého t_i lze reprezentovat posloupností 0 a 1 ve dvojkové soustavě, resp. posloupností logických hodnot. Délka této posloupnosti souvisí se zvolenou přesností, čili hustotou sítě bodů v P. Zvolíme-li počet číslic ve dvojkovém vyjádření t_i rovný 20, což odpovídá milionu kroků u každého parametru, dostaneme např. pro tři parametry, A=3, síť tvořenou $(2^{20})^3 \approx 1.18 \times 10^{18}$ body. To je příliš mnoho na to, abychom procházeli celou síť a v každém jejím bodě počítali X^2. Genetický algoritmus racionalizuje procházení sítě.

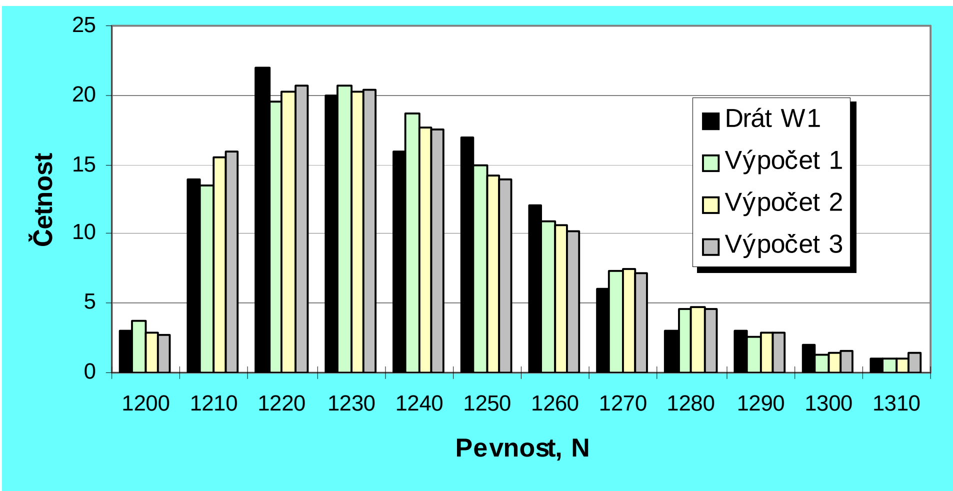
V kvádru P se náhodným výběrem t_i vygeneruje výchozí pměrně malá populace – podmnožina P, např. 200 bodů $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_A)$. V této populaci se opakovaně uplatňují výše popsané mechanismy převzaté z genetiky: křížení a mutace. Všechny body přitom stále zůstávají v kvádru P.

Vývoj populace se dá kdykoli zastavit z klávesnice nebo se přeruší automaticky po splnění nějaké zadané podmínky.

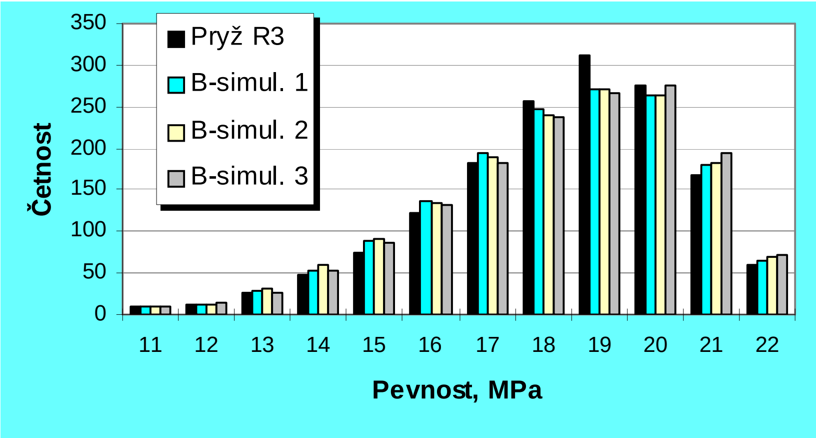
Normální rozdělení je jednodušší, představuje limitní případ binomického rozdělení, dá se fyzikálně modelovat např. *Galtonovou deskou* nebo její počítačovou analogií ve formě náhodné procházky [8]. Protože u normálního rozdělení je $x_{min} = -\infty$, $x_{max} = +\infty$, redukuje se počet neznámých parametrů na 2.

Zde uvedené B-rozdělení je jen jednou z možností volby. Další, stejně úspěšná rozdělení jsou uvedena v [7, 9].

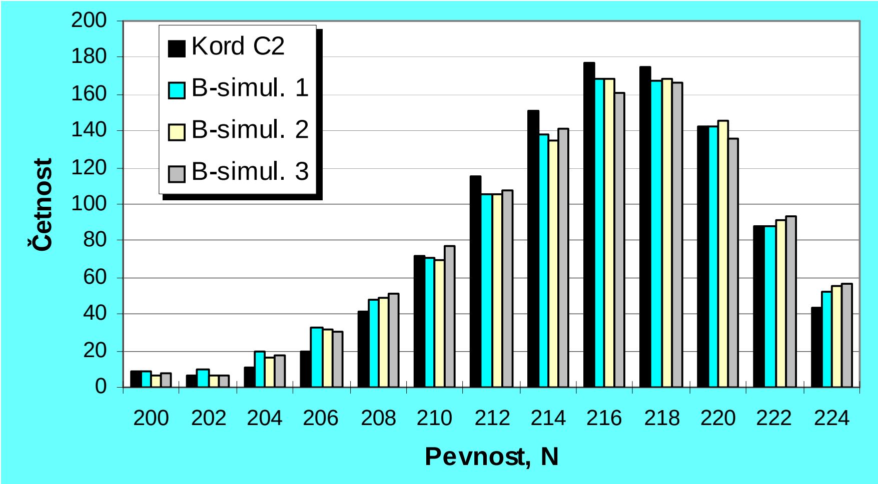
Následující obrázky ilustrují efektivnost vyloženého postupu. Ačkoli malý rozsah souborů pevností drátů (n = 120) snižuje průkaznost příslušných testů dobré shody, schopnost navrženého rozdělení (1) aproximovat reálné četnosti je jasně vidět.



Četnosti u pevnosti drátu W1 a výsledky 3 simulací odpovídajícího B-rozdělení (4 parametry).

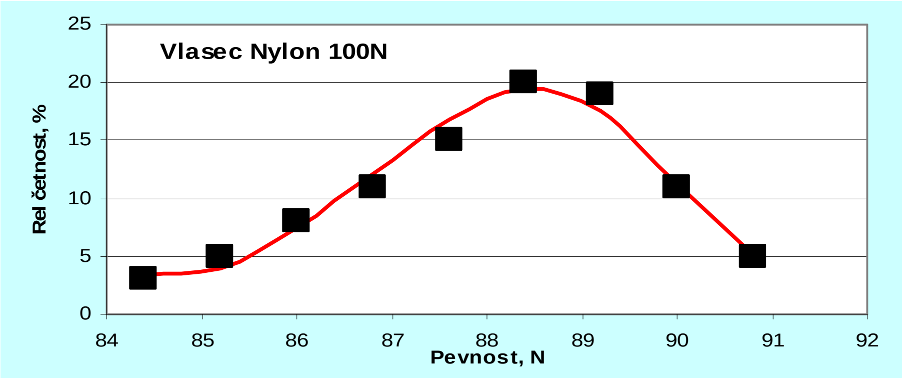


Četnosti pevností pryže R3 ve srovnání s výsledky simulace příslušného B-rozdělení (3 parametry, x_{min} =0).



Četnosti pevností kordu C2 ve srovnání s výsledky simulace příslušného B-rozdělení (3 parametry).

Podobná distribuce vyšla také u pevnosti nylonového rybářského vlasce.

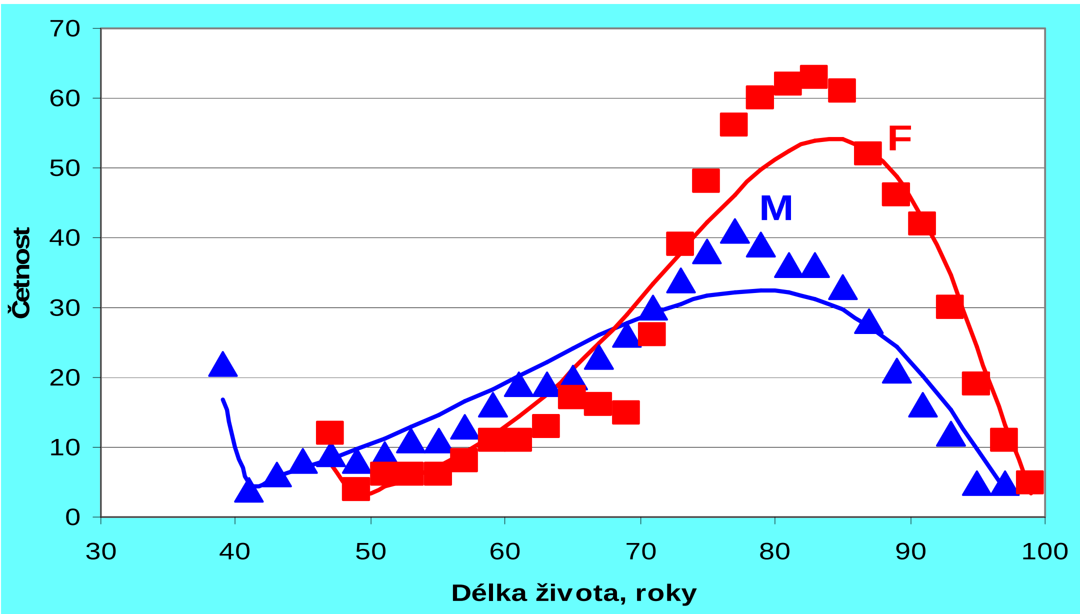


Distribuce pevnosti nylonového rybářského vlasce (4 parametry).

Předvedené zobecněné B-rozdělení je dost obecné a v reálných problémech se dá používat místo normálního rozdělení. Normální rozdělení má však jednoduché přirozeně akceptovatelné matematické pozadí (binomické rozdělení). Během staletí se vžilo natolik, že jeho platnost se zpravidla předpokládá automaticky, bez jakéhokoli ověřování. Tak se např. běžně určují regulační meze automatizované výroby nebo se hodnotí experimenty. Při stanovení pevnosti materiálu se trhá několik zkušebních těles, pevnost kordu pro pneumatiky se stanovuje třeba z 10-20 kordů a u tak malého výběru se může zjistit jen výběrový průměr a směrodatná odchylka. Podobně tomu může být třeba při hodnocení prospěchu žáků ve třídě apod. Když se ale hodnotí statistické výběry o rozsahu několika set nebo tisíc, může skutečná distribuce vyjít hodně odlišná od apriorního předpokladu normality.

Adekvátnost B-rozdělení lze ukázat např. na denní spotřebě vody v domácnosti, platbách za nákupy v jednom obchodě, na obvodech kmenů stromů vysázených ve stejnou dobu. V těchto příkladech testy dobré shody prokázaly neadekvátnost normálního rozdělení. B-rozdělení se osvědčilo také při popisu měření uniformity pneumatik a jistě je použitelné pro řadu dalších náhodných veličin z ekonomické i technologické praxe.

Následující graf ukazuje, že také poetické přirovnání smrti k přetržení niti života je do značné míry podloženo statistickou podobností.



Délka života mužů (M) a žen (F) (data ze Života farnosti 1999-2006, Zlín) a aproximace B-rozdělením.

ODKAZY

1. NOVÝ, L. – SMOLKA, J.: *Isaac Newton*. ORBIS Praha *1969*.
2. STRUIK, D. J.: *Dějiny matematiky*. ORBIS Praha *1963*.
3. SCHWABIK, Š. – ŠARMANOVÁ, P.: *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus Praha *1996*.
4. HAWKING, S. W.: *Stručná historie času*. MF, Praha *1991*.
5. HAWKING, S. W.: *On the Shoulders of Giants*. Running Press, Philadelphia. London *2004*.
6. TRKAL, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. NČSAV Praha *1956*.
7. www.koutny-math.com
8. KOUTNÝ, F.: *Matematická statistika*. Skriptum UTB Zlín *2005*.
9. KOUTNÝ, F., Plasty a Kaučuk, **40**, *2003*, s. 68-72.
10. ANDĚL, J.: *Matematická statistika*. SNTL Praha *1978*.
11. JARNÍK, V.: *Integrální počet II*. NČSAV Praha *1957*.

=================

Mnoho dalších informací a popř. další portréty Newtona lze samozřejmě získat vyhledávacími programy na internetu po zadání příslušného pojmu nebo jména.